7L-01

直線上の 2 サーバーオンラインマッチング問題に対する貪欲アルゴリズムの競合比解析 *

佐竹誠 † 宮崎修一 ‡

京都大学 工学部情報学科 † 京都大学 学術情報メディアセンター ‡

1 はじめに

オンライン問題は情報が時系列で与えられ、アルゴリズムはその時までに与えられた情報のみを使用して意思決定を行う問題であり、決定は後で変更することはできない。

オンラインメトリックマッチング問題 [3] はそのようなオンライン問題のひとつである。サーバーと呼ばれる事前に与えられた頂点の集合と、リクエストと呼ばれる時系列で与えられる頂点の集合間のマッチングを求める。距離空間は問題で規定されており、マッチングには頂点間の距離と等しいだけのコストがかかる。リクエストを全てマッチさせつつ、コストの和を最小化することが目的となる。これを一般化した問題として、サーバーが容量を持ち、その個数までのリクエストとマッチできるオンライン輸送問題 [3] がある。距離空間を直線に限定した問題は直線上のオンライン輸送問題 [1] と呼ばれる。文献 [1] はこの問題に対して、サーバーの数を k 個とすると、貪欲アルゴリズムの競合比が $4k$ 以下であることを示し、さらに $k \geq 3$ の場合に競合比が k 以下となる Optimal-Fill アルゴリズムを提案した。

本論文の結果. 本研究では、直線上のオンライン輸送問題で $k = 2$ の場合を扱う。本論文ではまず貪欲アルゴリズムの競合比が 3 以下であることを示した。これは文献 [1] の結果を $k = 2$ の場合に 8 から 3 に改善したことになる。また、任意の決定性アルゴリズムの競合比が 3 以上となること、すなわち貪欲アルゴリズムが最適であることを示した。

関連研究. 直線上のオンライン輸送問題で、各サーバーの容量が 1 である特別な場合として直線上のオンラインマッチング問題 [4] が研究されている。この問題に対する競合比の現在最良の下限は文献 [2] で示された 9.001 であるのに対し、上限は文献 [5] で示された Robust Matching アルゴリズムの $\Theta(\log n)$ である。

2 定義

まず直線上の 2 サーバーオンライン輸送問題を定義する。サーバー $s_L, s_R (\in \mathbb{R}, s_L < s_R, s_R - s_L = 2d)$ が事前に与えられ、それぞれ容量を持っている。2 つのサーバーの容量の合計は n であり、各サーバーは容量個までのリクエストとマッチできる。リクエスト数も n であり、時系列で与えられるリクエスト集合を $R = r_1, r_2, \cdots, r_n \in \mathbb{R}$ と書く。リクエスト r_i とサーバー s_X のマッチングには $d(r_i, s_X) = |r_i - s_X|$ のコストがかかる。リクエストがアルゴリズムで s_X、最適マッチングで s_Y とマッチしていることを $\langle s_X, s_Y \rangle$ と表記することがある。

アルゴリズムの性能評価には**競合比**という指標を用いる。入力 σ に対するアルゴリズム ALG によって求められるマッチングのコストを $ALG(\sigma)$、最適マッチングのコストを $OPT(\sigma)$ と表記し、$Rate(\sigma) = \frac{ALG(\sigma)}{OPT(\sigma)}$ と定義する。このとき ALG の競合比が c であるとは、任意の入力 σ に対して $Rate(\sigma) \leq c$ が成り立つことをいう。

直線上の 2 サーバーオンライン輸送問題に対して、リクエストが到着した時点で容量が残っているサーバーのうち近い方にマッチさせる貪欲アルゴリズムを **GREEDY** と表記する。ただしサーバー間のちょうど真ん中のリクエストは s_L にマッチさせるものとする。

3 競合比解析

3.1 GREEDY の競合比解析

紙面の都合上証明は適宜省略する。

補題 1. $(-\infty, s_L), (s_R, +\infty)$ にあるリクエストを含むような任意の入力列 σ に対して、そのようなリクエストを含まないかつ $Rate(\sigma') \geq Rate(\sigma)$ を満たす入力列 σ' が存在

---

* Competitive Analysis of Greedy Algorithm for Online Matching on a Line with Two Servers

† Makoto Satake, Department of Information, Faculty of Engineering, Kyoto University

‡ Shuichi Miyazaki, Academic Center for Computing and Media Studies, Kyoto University

する。

GREEDY が最初のリクエストをマッチさせたサーバーに容量が尽きるまで後続のリクエストをマッチさせ続けるような入力列を**片側優先的**と呼ぶ。

補題 2. 任意の片側優先的でない入力列 σ に対して、$Rate(\sigma') \geq Rate(\sigma)$ を満たす片側優先的な入力列 σ' が存在する。

以上の補題を用いて定理 1 を証明する。

定理 1. *GREEDY* の競合比は *3* 以下である。

証明. 最初に、2 つのサーバーの容量が等しい場合のみを解析すれば十分であることを示す。サーバーの容量が必ずしも等しくない入力を I とし、その入力列を σ とする。これに対し、サーバー容量が等しい入力 $\tilde{I}$ とそれに対する入力列 $\tilde{\sigma}$ で、$Rate(\tilde{\sigma}) \geq Rate(\sigma)$ を満たすものを構成する。入力列 σ のなかで GREEDY と OPT で同じサーバー s_X にマッチしているリクエストがあった場合、それを削除した入力列を σ' とし、s_X の容量を 1 減らした入力を I' とする。I' において σ' の各リクエストに対する GREEDY と OPT の振る舞いは、I における σ に対する振る舞いと同じである。従って $Rate(\sigma') \geq Rate(\sigma)$ が成り立つ。この操作を GREEDY と OPT が同じサーバーに割り当てるリクエストがなくなるまで行った結果を $\tilde{I}, \tilde{\sigma}$ とすると、2 つのサーバーの容量は同じになっており、かつ $Rate(\tilde{\sigma}) \geq Rate(\sigma)$ の条件を満たす。

したがって、リクエスト数を $2m$、各サーバーの容量を m とできる。補題 2 より前半の m 個が $\langle s_L, s_R \rangle$ で後半の m 個が $\langle s_R, s_L \rangle$ であるような入力列 σ を考えれば良い。前半の m 個のリクエストの s_L との距離を $d_{L_i} (i = 1, 2, \ldots, m)$ とし、後半の m 個のリクエストの s_R との距離を $d_{R_j} (j = 1, 2, \ldots, m)$ とおく。補題 1 より $d_{L_i} \leq d (i = 1, 2, \ldots, m)$ であり、後半では s_L の容量が 0 であることから $d_{R_i} \leq 2d (i = 1, 2, \ldots, m)$ である。ここで $S = \sum_{i=1}^{m} d_{L_i} + \sum_{j=1}^{m} d_{R_j}$ とおくと $S \leq 3dm$ を満たす。以上より、

$$
\begin{aligned}
Rate(\sigma) &= \frac{\sum_{i=1}^{m} d_{L_i} + \sum_{j=1}^{m} d_{R_j}}{\sum_{i=1}^{m}(2d - d_{L_i}) + \sum_{j=1}^{m}(2d - d_{R_j})} \\
&= \frac{S}{4dm - S} = \frac{1}{\frac{4dm}{S} - 1} \leq 3
\end{aligned}
$$

となるため、GREEDY の競合比は 3 以下である。 □

3.2 任意の決定性アルゴリズムの競合比解析

定理 2. 任意の決定性アルゴリズムの競合比は *3* 以上である。

証明. s_L の容量を k、s_R の容量を $n - k$ とする。まず最初の $k - 1$ 個のリクエストを s_L に、$n - k - 1$ 個のリクエストを s_R に送る。これらのリクエストを OPT はそれぞれ全て s_L, s_R にマッチさせる。ここで ALG がそのようにマッチさせないリクエストが存在したとすると、アドバーサリは残りの 2 つのリクエストを s_L, s_R に 1 つずつ送ることで OPT のコストは 0、ALG のコストは 0 より大きくなる。つまり比が無限大の入力列が提示できた。次にアルゴリズムが全てのリクエストを OPT と同様にマッチさせた場合を考える。次の 1 つのリクエストを $\frac{s_L+s_R}{2}$ に送る。このリクエストを ALG がマッチさせたサーバーを s_X、残ったサーバーを s_Y とする。OPT は s_Y にマッチさせ、その後アドバーサリは s_X の位置にリクエストを送る。ALG はそれを s_Y にマッチさせるほかなく、OPT は s_X にマッチさせる。この入力列の比は $\frac{d+2d}{d} = 3$ となる。以上より任意の決定性アルゴリズムに対して比が 3 以上の入力列が存在することが示せたので、競合比は 3 以上である。 □

4 今後の課題

今後の課題としてサーバー数を k 個に一般化した問題が考えられる。この問題については競合比の上限が文献 [1] で研究されているが、下限については解析がなされていない。

謝辞. 本研究は JSPS 科研費 JP16K00017 の助成を受けたものです。

参考文献

[1] Ahmed A.R., Rahman M.S. and Kobourov S.: Online facility assignment, *Theoretical Computer Science*, to appear.

[2] Fuchs B., Hochstttler W., Kern W.: Online matching on a line, *Theoretical Computer Science*, Vol. 332, pp. 251-264 (2005) .

[3] Kalyanasundaram B., Pruhs K.: Online weighted matching, *Journal of Algorithms*, Vol. 14, Issue 3, pp. 478-488 (1993).

[4] Kalyanasundaram B., Pruhs K.: Online network optimization problems, *Online Algorithms. Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 1442, pp. 268-280 (1998).

[5] Raghvendra S.: Optimal analysis of an online algorithm for the bipartite matching problem on a line, *Proc. SoCG 2018*, pp. 67:1-67:14 (2018).