CA-002

構造変化に応じるロバスト修復可能マトロイド基問題に対する固定パラメータアルゴリズム

A Parameterized View to the Robust Recoverable Base Problem of Matroids Under Structural Changes

伊藤 健洋 [*]　垣村 尚徳 [†]　神山 直之 [‡]　小林 佑輔 [§]　岡本 吉央 [¶]

Takehiro Ito　Naonori Kakimura　Naoyuki Kamiyama　Yusuke Kobayashi　Yoshio Okamoto

1 はじめに

ロバスト修復可能最適化 (または，修復可能ロバスト最適化) は，不確実性を扱う数理最適化の一分野であり，Liebchen ら [18] が導入した．例えば，通信ネットワークを構成したいとき，伝統的な最適化の枠組では最小費用全域木問題を解く．しかし，未来においていくつかのリンクが故障したり，通信費用が変化することもありうる．そのような場合には，ネットワークを再計算したくなるかもしれない．その際，新しいネットワークを一から計算し，再び構成することはコストがかかるので，できる限り避けたい．

そのような変化に対処するため，ロバスト修復可能最適化の枠組では，二段階の意思決定を行う．第一段階では，最小費用であるとは限らないが，未来に起きうる変化に対してロバストであるような全域木を構成する．第二段階の前に，変化が起き，意思決定者は変化の内容をすべて知る．そして，第二段階では，第一段階で計算した全域木を修正することで，変化後の状況に合った全域木を得る．全体の目的は，第一段階の構成費用と第二段階の修正費用の (荷重) 和を最小化することである．

このような問題設定は通信ネットワークのみならず，スケジューリングや鉄道最適化にも現れる [18]．近年では，標準的な組合せ最適化問題のロバスト修復可能バージョンも研究されてきている [1, 2, 5, 6, 10]．

本研究では，不確実性として未来における**構造変化**を扱う．すなわち，第二段階の前に変化するものは考えている組合せ構造である．通信ネットワークの例において，リンク故障は構造変化にあたる．また，第一段階の意思決定において，不確実性を表現する有限個の**シナリオ**を知っており，それらの 1 つが第二段階の前に変化として実現する状況を考える．

本研究が扱う問題の最も基本的な形では，入力として，無向グラフ $G=(V,E)$ が与えられる．また，シナリオの数を s とし，各 $i\in\{1,2,\dots,s\}$ に対して G の部分グラフ $G_i=(V,E_i)$ をシナリオとして考え，これも入力として与えられるとする．つまり，各シナリオにおいて $E\setminus E_i$ の辺が故障して使えなくなると見なすのである．各部分グラフ G_i は連結であり，すなわち，G の全域木を含むと仮定する．このとき，G の全域木 $T=(V,B)$ と各 $i\in\{1,2,\dots,s\}$ に対する G_i の全域木 $T_i=(V,B_i)$ で，$\max_i|B\triangle B_i|$ ができる限り小さくなるものを見つけたい ($\triangle$ は対称差を表す)．ここで，$|B\triangle B_i|$ は B と B_i の間の距離 (差分) を表すので，$\max_i|B\triangle B_i|$ は第二段階の費用に対応する．なお，すべての全域木の費用 (辺数) は等しいため，この目的関数では第一段階の費用を無視している．

実際に本研究で考察するのは，以下の判定問題である．すなわち，$\max_i|B\triangle B_i|$ を最小化する代わりに，与えられた自然数 k に対して，$\max_i|B\triangle B_i|\le 2k$ を満たすような全域木 $T,T_1,T_2,\dots,T_s$ が存在するか問うわけである．ここで，$|B|=|V|-1=|B_i|$ であるから，$|B\triangle B_i|$ は必ず偶数であることに注意する．この判定問題が解ければ，二分探索などを用いることで，最小化問題も解くことができる．また，最小化問題を解くことができれば，その最適値と $2k$ を比べることでこの判定問題も解くことができる．つまり，この判定問題と先の最小化問題は多項式時間等価である．

* 東北大学，Tohoku University.
† 慶應義塾大学，Keio University.
‡ 九州大学/JST, さきがけ, Kyushu University/JST, PRESTO.
§ 京都大学，Kyoto University.
¶ 電気通信大学，University of Electro-Communications.

ここで，G_i の全域木 $T_i = (V, B_i)$ で $|B \triangle B_i| \leq 2k$ を満たすものが存在することは，$|B \cap E_i| \geq |V| - k - 1$ が成り立つことと同値であることに注意する (補題 1 参照)．

ここまでに述べてきた最も基本的な形は，次のようにマトロイドの設定に一般化できる (マトロイドに関して必要な定義は次項で述べる)．$\mathbf{M} = (E, \mathcal{I})$ をマトロイド ($\mathcal{I}$ は独立集合族) であるとする．$\mathbf{M}$ の基族を $\mathcal{B}(\mathbf{M})$ で表す．$\mathcal{B}(\mathbf{M})$ の要素 (基) の要素はすべて同じサイズを持ち，そのサイズは $\mathbf{M}$ のランクと呼ばれる．集合 $X \subseteq E$ に対して，$\mathrm{rk}(X) = \max\{|I| \mid I \in \mathcal{I}, I \subseteq X\}$ とする．

本論文の研究対象は次の問題である．

ロバスト修復可能マトロイド基問題

入力 ランクが r のマトロイド $\mathbf{M} = (E, \mathcal{I})$，$s$ 個の部分集合 $E_1, E_2, \ldots, E_s \subseteq E$ (ただし，任意の $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ に対して $\mathrm{rk}(E_i) = r$ を満たす)，正の整数 k.

出力 任意の $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ に対して $|B \cap E_i| \geq r - k$ を満たす基 $B \in \mathcal{B}(\mathbf{M})$.

マトロイド $\mathbf{M}$ がグラフ $G = (V, E)$ から得られるとき (グラフ的マトロイドであるとき)，r は G の極大森の辺数，$\mathcal{I}$ は G の森の辺集合全体の族，$\mathcal{B}(\mathbf{M})$ は G の極大森の辺集合全体の族，$\mathrm{rk}(E_i)$ は部分グラフ $G_i = (V, E_i)$ の極大森の辺数を表す．つまり，$r = |V| - 1$ のとき，ロバスト修復可能マトロイド基問題は先に挙げた通信ネットワークに対するロバスト修復可能最適化問題になる．

本論文の結果は以下の通りである．

1. ロバスト修復可能マトロイド基問題は NP 困難である．それは，$k \geq 1$ が定数であり，$\mathbf{M}$ が一様マトロイド，または，グラフ的マトロイドであっても成り立つ．このとき，s は入力の一部であることに注意する．

2. s がパラメータであり，k が任意であるとき，ロバスト修復可能マトロイド基問題を解く固定パラメータアルゴリズムが存在する．特に，s が定数であり，k が任意であるとき，ロバスト修復可能マトロイド基問題を解く多項式時間アルゴリズムが存在する．このとき，$\mathbf{M}$ は一様マトロイドやグラフ的マトロイドでなくてもよいことに注意する．

固定パラメータアルゴリズムとは次のようなアルゴリズムである．固定パラメータアルゴリズムを考える問題では，入力とは別にパラメータと呼ばれる数値 p が与えられる (そのような問題はパラメータ化問題と呼ばれることがある)．そして，固定パラメータアルゴリズムとは，ある関数 $f \colon \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ を用いて計算時間が $f(p)\mathrm{poly}(n)$ と書けるものを指す (n は入力のサイズ，poly は多項式)．例えば，$2^p n^2$ は固定パラメータアルゴリズムの計算時間となりうるが，n^p は固定パラメータアルゴリズムの計算時間となりえない．特に，p が定数であるとき，固定パラメータアルゴリズムから多項式時間アルゴリズムが得られるが，その際に計算時間として現れる多項式の次数は p に依存しない．

固定パラメータアルゴリズムを持つパラメータ化問題全体のクラスを FPT で表すことがある．固定パラメータアルゴリズムの詳細については教科書 [20, 7] を参照のこと．

ロバスト修復可能マトロイド基問題は $k = 0$ のとき簡単に解けることを補足する．$k = 0$ のとき，$|B \cap E_i| \geq r$ が成り立てばよいが，この条件が成り立つことと $B \subseteq E_i$ が成り立つことは同値である ($|B| = r$ であるため)．したがって，$\mathbf{M}$ を $E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_s$ に制限することによって得られるマトロイドの基を 1 つ見つけ，そのサイズが r であることを確認すればよい．制限マトロイドの基は貪欲アルゴリズムによって多項式時間で見つけることができる．

既存研究との関係

ロバスト修復可能マトロイド基問題は既存研究でも扱われているが，そこではもっぱら重みに関する不確実性，すなわち，重みの変化を論じている．すなわち，入力として，マトロイド $\mathbf{M} = (E, \mathcal{I})$ と各要素 $e \in E$ に対する $s{+}1$ 個の重み $w_e^0, w_e^1, \ldots, w_e^s \in \mathbb{R}_+$ と自然数 $k \in \mathbb{N}$ が与えられ，出力として，$s{+}1$ 個の基 $B_0, B_1, \ldots, B_s \in \mathcal{B}(\mathbf{M})$ で，各 $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ に対して $|B_0 \triangle B_i| \leq 2k$ を満たし，かつ

$$\sum_{e \in B_0} w_e^0 + \max_{i \in \{1,2,\ldots,s\}} \sum_{e \in B_i} w_e^i$$

を最小化するものを見つける問題である．この問題を以後短く「重み変化版」と呼ぶことにする．本研究が扱うロバスト修復可能マトロイド基問題は，任意の $e \in E$ と $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ に対して，$w_e^0 = 1$ であり，

$$w_e^i = \begin{cases} 1 & (e \in E_i \text{ のとき}) \\ \infty & (e \notin E_i \text{ のとき}) \end{cases}$$

表 1: ロバスト修復可能マトロイド基問題に対する結果．本論文の結果は「$*$」で示している．

			変化	
			重み	構造
マトロイド	シナリオ数 s	ロバスト性 k		
一様	2	任意	NP 困難 [3]	
一様	任意	2	NP 困難 [16]	
グラフ的	2	0	NP 困難 [13]	
一般	1	定数	多項式 [4]	
一様	任意	1		NP 困難 [$*$]
グラフ的	任意	1		NP 困難 [$*$]
一般	パラメータ	任意		FPT [$*$]

とすれば，定式化できる (∞ は十分大きな正の定数であると見なす).

$\mathbf{M}$ が一様マトロイドであるときを考える．Averbakh [3] は重み変化版が $s = 2$ のときに弱 NP 困難であることを証明した．Kasperski, Zieliński [15] は k と s が入力の一部であるとき，重み変化版が強 NP 困難であることを証明した．Kasperski, Zieliński [16] は $k = 2$ であるとき (しかし s は入力の一部であるとき) 重み変化版が強 NP 困難であることを証明した．Kasperski, Kurpisz, Zieliński [14] は重み変化版を任意の定数倍で近似することが NP 困難であることを証明した．近似比が $\ln s$ であるような近似アルゴリズムも知られている [15, 14].

$\mathbf{M}$ がグラフ的マトロイドであるときを考える．Kasperski, Kurpisz, Zieliński [13] は $s = 2$ かつ $k = 0$ であっても重み変化版が弱 NP 困難であることを証明した．彼らはまた，s と k が入力の一部であるとき，この問題が強 NP 困難であることも証明した．

一般のマトロイドに対して，Büsing [4] は $s = 1$ かつ k が任意の定数であるとき，重み変化版が多項式時間で解けることを示した．しかし，そのアルゴリズムは k に関する固定パラメータアルゴリズムではない．

以上，既存結果と本研究の結果を表 1 にまとめる．既存研究におけるこれらの定理から本研究の結果が直ちに導かれるわけではないことを補足する．

2 準備

点集合 V と辺集合 E を持つ無向グラフ G を $G = (V, E)$ で表す．特に述べない限り本論文においてはグラフは全て無向，有限であるとする．無向グラフ $G = (V, E)$ に対して，辺部分集合 $F \subseteq E$ は，グラフ (V, F) が閉路を含まないとき，**森**と呼ばれる．

E を有限集合とする．E 上の**マトロイド**とは，E と以下の条件を満たす $\mathcal{I} \subseteq 2^E$ によって構成される集合システム $\mathbf{M} = (E, \mathcal{I})$ である．

(I1) $\emptyset \in \mathcal{I}$.

(I2) $X \subseteq Y$ かつ $Y \in \mathcal{I}$ ならば $X \in \mathcal{I}$.

(I3) $X, Y \in \mathcal{I}$ かつ $|X| > |Y|$ ならば，$Y \cup \{e\} \in \mathcal{I}$ を満たす $e \in X \setminus Y$ が存在.

集合 $I \in \mathcal{I}$ は $\mathbf{M}$ の**独立集合**と呼ばれ，E は $\mathbf{M}$ の**台集合**と呼ばれる．

マトロイド $\mathbf{M} = (E, \mathcal{I})$ に対して，極大独立集合は $\mathbf{M}$ の**基**と呼ばれる．$\mathbf{M}$ の基の族 $\mathcal{B}$ は以下の性質を満たす．

(B1) $\mathcal{B} \neq \emptyset$.

(B2) $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ かつ $e \in B_1 \setminus B_2$ ならば，$(B_1 \setminus \{e\}) \cup \{e'\} \in \mathcal{B}$ を満たす $e' \in B_2 \setminus B_1$ が存在.

マトロイド $\mathbf{M} = (E, \mathcal{I})$ の全ての基のサイズが同じであることは容易にわかる．基のサイズを $\mathbf{M}$ の**ランク**と呼び，$\mathrm{rk}(\mathbf{M})$ で表すこととする．部分集合 $X \subseteq E$ の**ランク**とは $I \subseteq X$ を満たす独立集合 $I \in \mathcal{I}$ の最大サイズで定義され，$\mathrm{rk}_{\mathbf{M}}(X)$ もしくは単に $\mathrm{rk}(X)$ で表される．つまり，$\mathrm{rk}(X) = \max\{|I| \mid I \in \mathcal{I}, I \subseteq X\}$ となる．

制限はあるマトロイドから別のマトロイドを得る操作の一つであり，以下のように定義される．$\mathbf{M} = (E, \mathcal{I})$ をマトロイド，F を E の部分集合とする．このとき，$\mathbf{M}$ の F 上への**制限**とは，$\mathcal{I}|_F = \{I \cap F \mid I \in \mathcal{I}\}$ を満たす集合族 $\mathbf{M}|_F = (F, \mathcal{I}|_F)$ である．$\mathbf{M}|_F$ はマトロイ

ドとなることが知られている．制限 $\mathbf{M}|_F$ は $\mathbf{M}$ からの $E \setminus F$ の**除去**とも呼ばれる．

マトロイドの典型的な例はグラフから構成されるものである．$G = (V, E)$ を無向グラフとし，$\mathcal{F}$ で G の森の辺の族とする．つまり $\mathcal{F} = \{F \subseteq E \mid (V, F)$ は森 $\}$ である．このとき $(E, \mathcal{F})$ はマトロイドとなる．このようなマトロイドは G の**閉路マトロイド**または**グラフ的マトロイド**と呼ばれる．

他の典型的なマトロイドのクラスとして一様マトロイドがある．r を正の整数とする．さらに，有限集合 E に対して，$\mathcal{I}$ を E の部分集合でサイズが r 以下のものの族とする．つまり $\mathcal{I} = \{X \subseteq E \mid |X| \leq r\}$ である．このとき $\mathbf{M} = (E, \mathcal{I})$ はランク r の**一様マトロイド**と呼ばれるマトロイドとなる．

本論文で用いる別のマトロイドのクラスとして分割マトロイドがある．有限集合 E の分割とは，E の部分集合の族 $\{E_1, E_2, \ldots, E_r\}$ で，$E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_r = E$ と，各 $i \neq j$ に対して，$E_i \cap E_j = \emptyset$ を満たすことである．有限集合 E の分割 $\{E_1, E_2, \ldots, E_r\}$ 上に定義された**分割マトロイド**とは，マトロイド $\mathbf{M} = (E, \mathcal{I})$ で，ある自然数 $d_1, d_2, \ldots, d_r$ を用いて $\mathcal{I}$ が

$$\mathcal{I} = \{X \subseteq E \mid |X \cap E_i| \leq d_i \ (\forall i \in \{1, 2, \ldots, r\})\}$$

として定義されるもののことである．

ロバスト修復可能マトロイド基問題の出力にある条件 $|B \cap E_i| \geq r - k$ は，ある $B_i \in \mathcal{B}(\mathbf{M}|_{E_i})$ に対して $|B \triangle B_i| \leq 2k$ が成り立つことと等価であることが分かる．

補題 1. ランクが r のマトロイド $\mathbf{M} = (E, \mathcal{I})$ に対して，$\mathrm{rk}_{\mathbf{M}}(E_i) = r$ を満たす $E_i \subseteq E$ と $B \in \mathcal{B}(\mathbf{M})$ を考える．このとき，次の 2 条件は等価である．

1. ある $B_i \in \mathcal{B}(\mathbf{M}|_{E_i})$ に対して $|B \triangle B_i| \leq 2k$.
2. $|B \cap E_i| \geq r - k$.

証明. まず, ある $B_i \in \mathcal{B}(\mathbf{M}|_{E_i})$ に対して $|B \triangle B_i| \leq 2k$ が成り立つと仮定する．このとき, $|B \cap E_i| \geq |B \cap B_i| = (|B| + |B_i| - |B \triangle B_i|)/2 \geq (r + r - 2k)/2 = r - k$ となる．

次に，$|B \cap E_i| \geq r - k$ であると仮定する．$B \in \mathcal{B}(\mathbf{M}) \subseteq \mathcal{I}(\mathbf{M})$ と (I2) が成り立つことから，$B \cap E_i \in \mathcal{I}(\mathbf{M}|_{E_i})$ となる．したがって，ある基 $B_i \in \mathcal{B}(\mathbf{M}|_{E_i})$ が存在して $B \cap E_i \subseteq B_i$ となる．このとき，$|B \cap B_i| \geq |B \cap (B \cap E_i)| = |B \cap E_i| \geq r - k$ である．ゆえに，$|B \triangle B_i| = |B| + |B_i| - 2|B \cap B_i| \leq r + r - 2(r - k) = 2k$ となる． □

本論文では，マトロイド $\mathbf{M} = (E, \mathcal{I})$ を入力するときには，独立性オラクルを与えるものとする．つまり，部分集合 $X \subseteq E$ をクエリとして受け取り，$X \in \mathcal{I}$ が成り立つかを判定できるオラクルとしてマトロイド $\mathbf{M}$ を入力する．グラフ的マトロイド，一様マトロイド，分割マトロイドに対して，そのようなオラクルは多項式時間で具体的に構成でき，各クエリは線形時間で処理できる．

マトロイドの共通独立集合問題は多項式時間で解くことができる [11]．これはマトロイド最適化において基本的な事実である．$\mathbf{M}_1 = (E, \mathcal{I}_1)$ と $\mathbf{M}_2 = (E, \mathcal{I}_2)$ をマトロイドとする．これらのマトロイドの交叉とは $\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2 = (E, \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2)$ である．$\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2$ は必ずしもマトロイドとはならないことに注意する．しかしながら，最大サイズの $X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ を多項式時間で求めることができる．

3 困難性

本節では，ロバスト修復可能マトロイド基問題が NP 困難であることを示す．

定理 2. 与えられるマトロイドが一様マトロイドであり，$k \geq 1$ が定数であっても，ロバスト修復可能マトロイド基問題は NP 困難である．

証明. グラフ上の安定集合問題をロバスト修復可能マトロイド基問題へ帰着する．グラフの**安定集合**とは，点部分集合 X で，すべての辺の高々一つの端点が X に含まれるものである．安定集合問題とは，無向グラフ $G = (V, E)$ が与えられたとき，G がサイズ t の安定集合を持つかを判定する問題である．安定集合問題は NP 困難であることが知られている [12]．

与えられたグラフ $G = (V, E)$ からロバスト修復可能マトロイド基問題の問題例を以下のように構成する．s で E のサイズを表し，k を正の整数とする．またマトロイド $\mathbf{M}$ を以下のように定義する．各 $e \in E$ に対して

$$\Gamma_e = \{v_{e,j} \mid j = 1, 2, \ldots, k - 1\}$$

と定義し，$\Gamma = \bigcup_{e \in E} \Gamma_e$ と定義する．そして $\mathbf{M}$ の台集合を $V^+ = V \cup \Gamma$ で定義する．また $\mathbf{M}$ の独立集合の族を

$$\mathcal{I}(\mathbf{M}) = \{X \subseteq V^+ \mid |X| \leq t + (k - 1)s\}.$$

で定義する．マトロイド $\mathbf{M}$ はランク $t + (k - 1)s$ の一様マトロイドである．各 $e = uv \in E$ に対して，$V_e^+ =$

$V^+ \setminus (\{u,v\} \cup \Gamma_e)$ と定義し，s 個のシナリオ $V_e^+, e \in E$ を用意する．よって，構成した問題例は (a) $|X| = t + (k-1)s$，(b) 任意の $e \in E$ に対して $|X \setminus V_e^+| \leq k$（等価な条件として $|X \cap V_e^+| \geq |X| - k$）を満たす点部分集合 $X \subseteq V^+$ を見つけるものとなる．以下では，このような X が存在するための必要十分条件が，G がサイズ t の安定集合を持つことであることを示す．

まず十分性を示す．G がサイズ t の安定集合 I を持つと仮定する．$X = I \cup \Gamma$ と定義する．このとき，

$$|X| = |I| + |\Gamma| = t + (k-1)s$$

が成り立つ．I は G の安定集合なので，任意の $e = uv \in E$ に対して，$|I \cap \{u,v\}| \leq 1$ が成り立ち，ゆえに，

$$|X \setminus V_e^+| = |\Gamma_e| + |I \cap \{u,v\}| \leq (k-1) + 1 \leq k.$$

が成り立つ．よって，X は条件 (a) と (b) を満たす．

続いて必要性を示す．ある点部分集合 X が条件 (a) と (b) を満たすと仮定する．さらに，このような X の中で $|X \cap \Gamma|$ を最大化するものを考える．このとき $X \setminus \Gamma$ が G の安定集合であることを示す．背理法で示すために，$X \setminus \Gamma$ が G の安定集合ではないと仮定する．このとき，$u, v \in X$ を満たす辺 $e = uv \in E$ が存在する．つまり，$u, v \in X \setminus V_e^+$ となる．条件 (b) より，$|X \setminus V_e^+| \leq k$ が成り立つため，

$$|X \cap \Gamma_e| \leq k - 2$$

が成り立つ．このことより，$|\Gamma_e| = k - 1$ であるから，$v_{e,j} \notin X \setminus V_e^+$ を満たす j が存在する．$X' = (X \cup \{v_{e,j}\}) \setminus \{u\}$ と定義すると，X' は (a) を満たす．さらに，$|X' \setminus V_e^+| \leq |X \setminus V_e^+|$ より X' は (b) も満たす．しかし，$|X \cap \Gamma| < |X' \cap \Gamma|$ より，これは X が $|X \cap \Gamma|$ を最大化することに矛盾する．よって，$X \setminus \Gamma$ は G の安定集合となる．さらに，$|X \setminus \Gamma| \geq |X| - |\Gamma| = t$ より，G はサイズ t 以上の安定集合を持つ．安定集合の部分集合も安定集合であるから，G はサイズ t の安定集合を持つ． □

一様マトロイドは必ずしもグラフ的マトロイドとはならないことに注意する．

定理 3. 与えられるマトロイドがグラフ的マトロイドであり，$k \geq 1$ が定数であっても，ロバスト修復可能マトロイド基問題は NP 困難である．

証明. グラフ上の 3 彩色問題をロバスト修復可能マトロイド基問題へ帰着する．グラフ $G = (V, E)$ の 3 彩色とは，写像 $c \colon V \to \{1,2,3\}$ で，任意の辺 $uv \in E$ に対して $c(u) \neq c(v)$ を満たすもののことである．3 彩色問題は，グラフが与えられ，3 彩色が存在するか否かを判定する問題であり，NP 困難であることが知られている [12].

3 彩色問題の問題例 G が与えられたとする．このとき以下のようにして，与えられた正の整数 k に対してロバスト修復可能マトロイド基問題の問題例を構築する．

$H = (W, F)$ を以下のように定義される $|V| + k$ 個の点を持ち多重辺を含むスターとする．

$$\begin{aligned} W &= \{w_0\} \cup \{w_v \mid v \in V\} \cup \{w_j' \mid j = 1, \ldots, k-1\}, \\ F &= \{e_v^i = w_0 w_v \mid v \in V, i \in \{1,2,3\}\} \\ &\quad \cup \{e_j' = w_0 w_j' \mid j = 1, \ldots, k-1\}. \end{aligned}$$

各 $i \in \{1,2,3\}$ に対して，$F_i = \{e_v^i \mid v \in V\}$ と定義する．さらに，$F' = \{e_j' = w_0 w_j' \mid j = 1, \ldots, k-1\}$ と定義する．つまり，$F = \bigcup_{i=1}^3 F_i \cup F'$ が成り立つ．また与えられるマトロイドは H 上のグラフ的マトロイドで定義される．さらに，以下のように $3|E|$ 個のシナリオを構築する．各辺 $uv \in E$ と $i \in \{1,2,3\}$ に対して，

$$E_{uv}^i = F \setminus \left(\{e_u^i, e_v^i\} \cup F'\right)$$

と定義する．このとき，構築した問題例は，任意の辺 $uv \in E$ と $i \in \{1,2,3\}$ に対して，$|B \setminus E_{uv}^i| \leq k$ を満たす H の全域木 $T = (W, B)$ を求める問題となる．この条件は $|B \cap (F' \cup \{e_u^i, e_v^i\})| \leq k$ と等価である．さらに，全域木 T は F' に含まれる辺を全て含む必要があるため，この条件は $|(B \setminus F') \cap \{e_u^i, e_v^i\}| \leq 1$ と等価であることがわかる．

ここからは，条件を満たす全域木が存在するための必要十分条件が，G が 3 彩色を持つことであることを示す．まず十分性を示すために G が 3 彩色 c を持つと仮定する．このとき，

$$B = \left\{e_v^{c(v)} \mid v \in V\right\} \cup F'$$

と定義する．すると $T = (W, B)$ は全域木であり，任意の辺 $e = uv \in E$ と $i \in \{1,2,3\}$ に対して，$c(u) \neq c(v)$ なので，$|(B \setminus F') \cap \{e_u^i, e_v^i\}| \leq 1$ が成り立つ．

続いて必要性を示すために，H が任意の辺 $e = uv \in E$ と $i \in \{1,2,3\}$ に対して，$|(B \setminus F') \cap \{e_u^i, e_v^i\}| \leq 1$ を満たす全域木 $T = (W, B)$ が存在すると仮定する．すると $F' \subseteq B$ が成り立ち，さらに B は任意の点 $v \in V$ に対して e_v^i $(i = 1,2,3)$ からちょうど一つ辺を含んでいる．彩色 c を，$e_v^i \in B$ が成り立つとき，またそのときのみ

$c(v) = i$ と定義する．このとき，任意の辺 $uv \in E$ と $i \in \{1,2,3\}$ に対して $|(B \setminus F') \cap \{e_u^i, e_v^i\}| \leq 1$ が成り立つことより，任意の辺 $uv \in E$ に対して $c(u) \neq c(v)$ が成り立つ．これにより証明が完了する． □

4 固定パラメータアルゴリズム：準備

ここから，s をパラメータとするとき，ロバスト修復可能マトロイド基問題が固定パラメータアルゴリズムによって解けることを証明する．その前に，まず本節では，s と k の両方をパラメータとするとき，ロバスト修復可能マトロイド基問題が固定パラメータアルゴリズムによって解けることを証明する．本節の内容を準備として，s をパラメータとするときのアルゴリズムは次節で説明する．

正の整数 s に対して，$[s] := \{1, 2, \ldots, s\}$ と定義する．非空な部分集合 $X \subseteq [s]$ に対して，

$$E_X = \left(\bigcap_{i \in X} E_i \right) \setminus \left(\bigcup_{i \in [s] \setminus X} E_i \right)$$

と定義する．すると，$\{E_X \mid X \subseteq [s], X \neq \emptyset\}$ はサイズが高々 $2^s - 1$ の E の分割となる．

B をロバスト修復可能マトロイド基問題の解とすると，

$$|B| = r \tag{1}$$

および任意の $i \in [s]$ に対して

$$\sum_{X \subseteq [s]:\, i \in X} |B \cap E_X| = |B \cap E_i| \geq r - k \tag{2}$$

が成り立つ．各 $X \subseteq [s]$ に対して $t_X = |B \cap E_X|$ と定義すると，式 (1) は

$$\sum_{X \subseteq [s]} t_X = r \tag{3}$$

と，式 (2) は

$$\sum_{X \subseteq [s]:\, i \in X} t_X \geq r - k \tag{4}$$

と書き換えることができる．

提案アルゴリズムは，まず式 (3) と式 (4) を満たす $\{t_X \mid X \subseteq [s]\}$ を列挙し，その後それぞれの $\{t_X \mid X \subseteq [s]\}$ の候補に対して，任意の部分集合 $X \subseteq [s]$ に対して $|B \cap E_X| = t_X$ を満たす基 $B \in \mathcal{B}(\mathbf{M})$ が存在するかを判定する．もし，ある $\{t_X \mid X \subseteq [s]\}$ に対してそのような基 B が存在すれば，B はロバスト修復可能マトロイド基問題の解となる．固定された $\{t_X \mid X \subseteq [s]\}$ に対して，このような基 B は，$\mathbf{M}$ と $\{E_X \mid \emptyset \neq X \subseteq [s]\}$ 上に定義された分割マトロイドに対する共通独立集合問題を解くことによって求めることができる．$\{E_X \mid \emptyset \neq X \subseteq [s]\}$ のサイズは $2^s - 1$ なので可能な $\{t_X \mid X \subseteq [s]\}$ の数は r^{2^s} で抑えることができる．よって，n を入力サイズとすると，このアルゴリズムの計算時間は $O(r^{2^s} \mathrm{poly}(n))$ となる．以下ではこの計算量を改良するために，可能な $\{t_X \mid X \subseteq [s]\}$ の数が抑えられることを示す．

定理 4. ロバスト修復可能マトロイド基問題は $O((sk)^{2^s} \mathrm{poly}(|E|))$ 時間で解くことができる．

証明．ロバスト修復可能マトロイド基問題の与えられた入力に対する解の 1 つを B とする．以下では $|B \setminus E_{[s]}| \leq sk$ を示す．これは $\sum_{X \subsetneq [s]} t_X \leq sk$ を意味し，よって可能な $\{t_X \mid X \subseteq [s]\}$ の数が $(sk)^{2^s}$ で抑えられ，証明が完了する．

問題の定義より

$$\sum_{i \in [s]} |B \cap E_i| \geq \sum_{i \in [s]} (r - k) \geq s(r - k)$$

が成り立つ．一方で，

$$\begin{aligned} \sum_{i \in [s]} |B \cap E_i| &= \sum_{e \in B} |\{i \in [s] \mid e \in E_i\}| \\ &\leq s|B| - |B \setminus E_{[s]}| \\ &= sr - |B \setminus E_{[s]}| \end{aligned}$$

が成り立つので，組み合わせると，$|B \setminus E_{[s]}| \leq sk$ が導かれる． □

5 固定パラメータアルゴリズム：主結果

前節では s と k に関する固定パラメータアルゴリズムを提案したが，本節では s のみに関する固定パラメータアルゴリズムを提案する．そのために，マトロイド多面体に関する Edmonds の結果を利用する．

補題 5 (Edmonds [11])**.** 任意のマトロイド $\mathbf{M} = (U, \mathcal{I})$ と部分集合 $I \subseteq U$ を考える．このとき，$I \in \mathcal{I}$ が成り

立つための必要十分条件は，任意の部分集合 $U' \subseteq U$ に対して

$$\sum_{u \in U'} \chi_I(u) \leq \mathrm{rk}(U')$$

が成り立つことである．ただし，χ_I は I の特性ベクトルを表す．すなわち，$u \in I$ のとき，$\chi_I(u) = 1$ であり，$u \notin I$ のとき，$\chi_I(u) = 0$ である． □

以下の条件を満たす (t, x) 全体の集合を P で表す．

$$\sum_{X \subseteq [s]} t_X = r, \tag{5}$$
$$\sum_{X \subseteq [s]\colon i \in X} t_X \geq r - k \qquad (\forall i \in [s]), \tag{6}$$
$$\sum_{e \in E_X} x_e = t_X \qquad (\forall X \subseteq [s]), \tag{7}$$
$$\sum_{e \in E'} x_e \leq \mathrm{rk}(E') \qquad (\forall E' \subseteq E), \tag{8}$$
$$t \in \mathbb{Z}_+^{2^{[s]}},$$
$$x \in \{0,1\}^E.$$

補題 6. ロバスト修復可能マトロイド基問題の解が存在するための必要十分条件は $P \neq \emptyset$ である．

証明．ロバスト修復可能マトロイド基問題の解 B が存在すると仮定する．各 $X \subseteq [s]$ に対して $t_X = |B \cap E_X|$ と定義すると式 (5) と (6) を満たすことは第 4 節において既に示した．$x = \chi_B$ と定義すると $t_X = |B \cap E_X|$ より式 (7) が成り立ち，さらに，補題 5 より式 (8) が満たされる．よって $(t, x) \in P$ が成り立つ．

$P \neq \emptyset$ と仮定し，(t, x) を P の要素とする．B を $x_e = 1$ を満たす $e \in E$ の集合と定義すると，式 (5) と (7) より $|B| = r$ が成り立つ．よって式 (8) と補題 5 より $B \in \mathcal{B}(\mathbf{M})$ が成り立つ．さらに式 (7) より各 $X \subseteq [s]$ に対して $|B \cap E_X| = t_X$ が成り立つことより，任意の $i \in [s]$ に対して

$$|B \cap E_i| = \sum_{X \subseteq [s]\colon i \in X} |B \cap E_X| = \sum_{X \subseteq [s]\colon i \in X} t_X$$

が成り立つ．よって式 (6) より任意の $i \in [s]$ に対して $|B \cap E_i| \geq r - k$ が成り立ち，B がロバスト修復可能マトロイド基問題の解となることがわかる． □

補題 6 よりロバスト修復可能マトロイド基問題の解の存在性を判定するためには，$P \neq \emptyset$ が成り立つかを判定すればよいことがわかる．さらに補題 6 の証明より，$P \neq \emptyset$ ならば P の要素からロバスト修復可能マトロイド基問題の解を構成することができることがわかる．

各部分族 $\mathcal{S} \subseteq 2^{[s]}$ に対して，$\delta(\mathcal{S})$ で，$e \in E_S$ を満たす $S \in \mathcal{S}$ が存在する $e \in E$ の集合を表す．つまり，$\delta(\mathcal{S}) = \{e \in E \mid \exists S \in \mathcal{S}, e \in E_S\}$ である．

補題 7 (McDiarmid [19, Theorem 2])**.** 任意の $t \in \mathbb{Z}_+^{2^{[s]}}$ に対して，式 (7) と式 (8) を満たす $x \in \{0,1\}^E$ が存在するための必要十分条件は

$$\sum_{X \in \mathcal{S}} t_X \leq \mathrm{rk}(\delta(\mathcal{S})) \quad (\forall \mathcal{S} \subseteq 2^{[s]})$$

が成り立つことである． □

補題 7 より，P が非空であるための必要十分条件は，以下の条件を満たす t が存在することである．

$$\sum_{X \subseteq [s]} t_X = r, \tag{9}$$
$$\sum_{X \subseteq [s]\colon i \in X} t_X \geq r - k, \qquad (\forall i \in [s]), \tag{10}$$
$$\sum_{X \in \mathcal{S}} t_X \leq \mathrm{rk}(\delta(\mathcal{S})) \qquad (\forall \mathcal{S} \subseteq 2^{[s]}), \tag{11}$$
$$t \in \mathbb{Z}_+^{2^{[s]}}. \tag{12}$$

このような t が存在したとき，$\mathbf{M}$ と以下のように定義されるマトロイド $\mathbf{M}' = (E, \mathcal{I}')$

$$\mathcal{I}' = \{I \subseteq E \mid \forall X \subseteq [s], |I \cap E_X| \leq t_X\}$$

の最大共通独立集合 I^* を求め，$x = \chi_{I^*}$ と定義することにより，式 (7) と式 (8) を満たす $x \in \{0,1\}^E$ を求めることができる．

式 (9)–(12) を満たす t が存在するか判定するために，整数計画法のアルゴリズムを用いる．次の補題にあるように，整数計画法に対する固定パラメータアルゴリズムが知られている．

補題 8 (Lenstra [17])**.** 有限集合 U, V に対して，行列 $A \in \mathbb{R}^{V \times U}$ とベクトル $b \in \mathbb{R}^V$ を考える．行列 A のランクが ℓ であるとき，以下の集合

$$\{x \in \mathbb{Z}^U \mid Ax \leq b\}$$

が空か否かを判定する問題を解く固定パラメータアルゴリズムが存在する．ただし，パラメータは ℓ である． □

補題 8 の問題を解く現在最速の固定パラメータアルゴリズムの計算時間は $2^{O(\ell \log \ell)}$ と入力サイズの多項式の積で表される [8, 9].

式 (9)–(12) を補題 8 の形式で書くとき，その係数行列の行数は 2^s，列数は $2^s + s + 3$ となる．したがって，補題 8 を $\ell \leq 2^s$ として適用でき，以下の定理が得られる．

定理 9. ロバスト修復可能マトロイド基問題は $O(2^{O(s2^s)}\mathrm{poly}(|E|))$ 時間で解くことができる． □

特に，$s = O(\log\log|E|)$ のとき，ロバスト修復可能マトロイド基問題は多項式時間で解けることが分かる．

6 結論

ロバスト修復可能最適化問題の一例に対して，固定パラメータアルゴリズムを設計した．問題の NP 困難性 (定理 2, 3) より，P $\neq$ NP ならば，厳密アルゴリズムの計算時間が指数関数的に依存することは避けられない．しかし，設計した固定パラメータアルゴリズムでは計算時間の指数関数性がシナリオ数 s にしか依存しないところまで低減できている (定理 9).

今後の展望として，計算時間を改善することのように自明なものの他に，ロバスト性に対する別のモデル化を考察することが挙げられる．本論文では，$\max_i |B \triangle B_i|$ によってロバスト性を定量化したが，他にも $\sum_i |B \triangle B_i|$ で定量化することも考えられる．これは第二段階の修正費用の期待値を抑えることに対応する．

謝辞 本研究は以下の助成を受けたものである．JST CREST JPMJCR1402, JSPS 科研費 JP18H04091, JP19K11814 (伊藤), JSPS 科研費 JP17K00028, JP18H05291 (垣村), JST さきがけ JPMJPR1753 (神山), JSPS 科研費 JP17K19960, JP18H05291, JP20K11692 (小林), JSPS 科研費 JP20K11670, JST CREST JPMJCR1402 (岡本).

参考文献

[1] E. Álvarez-Miranda, E. Fernández, and I. Ljubić. The recoverable robust facility location problem. *Transportation Research Part B: Methodological*, 79:93–120, 2015.

[2] E. Álvarez-Miranda, I. Ljubic, S. Raghavan, and P. Toth. The recoverable robust two-level network design problem. *INFORMS J. Comput.*, 27(1):1–19, 2015.

[3] I. Averbakh. On the complexity of a class of combinatorial optimization problems with uncertainty. *Math. Program.*, 90(2):263–272, 2001.

[4] C. Büsing. *Recoverable Robustness in Combinatorial Optimization*. PhD thesis, Technical University of Berlin, 2010.

[5] C. Büsing. Recoverable robust shortest path problems. *Networks*, 59(1):181–189, 2012.

[6] C. Büsing, A. M. C. A. Koster, and M. Kutschka. Recoverable robust knapsacks: the discrete scenario case. *Optimization Letters*, 5(3):379–392, 2011.

[7] M. Cygan, F. V. Fomin, L. Kowalik, D. Lokshtanov, D. Marx, M. Pilipczuk, M. Pilipczuk, and S. Saurabh. *Parameterized Algorithms*. Springer, 2015.

[8] D. Dadush, C. Peikert, and S. Vempala. Enumerative lattice algorithms in any norm via M-ellipsoid coverings. In *Proceedings of the 52nd Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 580–589, 2011.

[9] D. Dadush and S. Vempala. Deterministic construction of an approximate M-ellipsoid and its applications to derandomizing lattice algorithms. In *Proceedings of the 23rd Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pages 1445–1456, 2012.

[10] M. C. Dourado, D. Meierling, L. D. Penso, D. Rautenbach, F. Protti, and A. R. de Almeida. Robust recoverable perfect matchings. *Networks*, 66(3):210–213, 2015.

[11] J. Edmonds. Submodular functions, matroids, and certain polyhedra. In R. Guy, H. Hanani, N. Sauer, and J. Schönheim, editors, *Combinatorial Structures and their Applications*, pages 69–87. Gordon and Breach, 1970.

[12] R. M. Karp. Reducibility among combinatorial problems. In *Complexity of Computer Computations*, The IBM Research Symposia Series, pages 85–103, 1972.

[13] A. Kasperski, A. Kurpisz, and P. Zieliński. Recoverable robust combinatorial optimization problems. In *Operations Research Proceedings 2012, Selected Papers of the International Annual Conference of the German Operations Research Society (GOR)*, pages 147–153, 2012.

[14] A. Kasperski, A. Kurpisz, and P. Zieliński. Approximating the min-max (regret) selecting items problem. *Inf. Process. Lett.*, 113(1-2):23–29, 2013.

[15] A. Kasperski and P. Zieliński. A randomized algorithm for the min-max selecting items problem with uncertain weights. *Annals OR*, 172(1):221–230, 2009.

[16] A. Kasperski and P. Zieliński. Robust recoverable and two-stage selection problems. *Discrete Applied Mathematics*, 233:52–64, 2017.

[17] H. W. Lenstra, Jr. Integer programming with a fixed number of variables. *Mathematics of Operations Research*, 8(4):538–548, 1983.

[18] C. Liebchen, M. E. Lübbecke, R. H. Möhring, and S. Stiller. The concept of recoverable robustness, linear programming recovery, and railway applications. In *Robust and Online Large-Scale Optimization: Models and Techniques for Transportation Systems*, pages 1–27. Springer, 2009.

[19] C. J. H. McDiarmid. Rado's theorem for polymatroids. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 78(2):263–281, 1975.

[20] R. Niedermeier. *Invitation to Fixed-Parameter Algorithms*. Oxford University Press, 2006.