

LDPC 符号に対する DC 最適化復号法

白鳥 春菜[†]
筑波大学[†]高野 祐一[‡]
筑波大学[‡]

1 はじめに

情報通信技術の発展により、我々は日々、様々なデジタルデータを通信・記録しているが、その過程では雑音（ノイズ）による誤りが生じることがある。このような誤りに対して、送信者の意図した情報を正確に復元するためには、「誤り訂正技術」が不可欠である。

低密度パリティ検査（LDPC：Low-Density Parity-Check）符号は、高い訂正性能と計算効率の良さから携帯電話や衛星通信などで広く用いられている。LDPC 符号に対する代表的な復号法としては sum-product 法 [1] が知られているが、最尤復号との一致性や収束性が保証されないという課題を抱えている。この課題を克服する手法として、最尤復号問題を整数最適化問題として定式化し、最適化ソルバーによって厳密に求解する方法も提案されている [3]。この手法は理論的には望ましい復号を実現するが、符号長の増加に伴い計算時間が大幅に増加し、通信路の信頼性が低い場合に誤り訂正性能が低下する傾向がある。

そこで本研究では、LDPC 符号の最尤復号問題に対して DC (Difference of Convex functions) 最適化 [2] を適用する。DC 表現により再定式化を行い、DC アルゴリズムを用いて反復的に求解することで、高速かつ、特に信頼性の低い通信路においても高精度な復号を実現する手法を提案する。

2 LDPC 符号の最尤復号問題

LDPC 符号は 2 元線形符号の一種であり、 $m \times n$ の疎な行列 $\mathbf{H}$ によって定義される。 $M := \{1, 2, \dots, m\}$, $N := \{1, 2, \dots, n\}$ とし、符号語 $\mathbf{x} := (x_j)_{j \in N} \in \{0, 1\}^n$ を二値決定変数、 $\mathbf{z} := (z_i)_{i \in M} \in \mathbb{Z}_+^m$ を非負整数決定変数とする。このとき、2 元有限体 $\mathbb{F}_2$ 上でのパリティ検査式 $\mathbf{H}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は、次のように整数の等式に書き換えることができる：

$$\mathbf{H}\mathbf{x} = 2\mathbf{z}.$$

また、受信語を $\mathbf{y} := (y_j)_{j \in N}$ 、対数尤度比を $\boldsymbol{\lambda} := (\lambda_j)_{j \in N}$ とすると、 λ_j は以下のように定義される：

$$\lambda_j := \log \left(\frac{\Pr(y_j | x_j = 0)}{\Pr(y_j | x_j = 1)} \right) \quad (\forall j \in N).$$

このとき、最尤復号問題は $\boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{x}$ を最小化する最適化問題に帰着される [3]。

以上より、LDPC 符号に対する最尤復号問題は、次のような整数最適化問題として定式化される：

$$\text{minimize} \quad \boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{x}, \quad (1)$$

$$\text{subject to} \quad \mathbf{H}\mathbf{x} = 2\mathbf{z}, \quad (2)$$

$$\mathbf{x} \in \{0, 1\}^n, \quad \mathbf{z} \in \mathbb{Z}_+^m. \quad (3)$$

3 提案手法

まず、二値決定変数と非負整数決定変数を凸関数の差である DC 関数を用いて記述する。二値決定変数 $\mathbf{x}$ は以下のような DC 関数 $p(\mathbf{x})$ を用いて実質的に等価な表現に書き換えることが

Decoding Algorithm Based on DC Optimization
for LDPC Codes

[†] Haruna Shiratori, University of Tsukuba

[‡] Yuichi Takano, University of Tsukuba

できる [2] :

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}) &= \sum_{j=1}^n x_j(1-x_j) \\ &= \sum_{j=1}^n x_j - \sum_{j=1}^n x_j^2 \leq 0, \\ \mathbf{x} &\in [0, 1]^n. \end{aligned}$$

このとき、二値制約を満たす場合に限り $p(\mathbf{x}) = 0$ となり不等式を満たす。

非負整数決定変数 $\mathbf{z}$ も同様に以下のような DC 関数 $q(\mathbf{z})$ を用いて実質的に等価な表現に書き換えることができる [2] :

$$\begin{aligned} q(\mathbf{z}) &= \sum_{i=1}^m \sin^2(\pi z_i) \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\eta}{2} z_i^2 - \sum_{i=1}^m \left(\frac{\eta}{2} z_i^2 - \sin^2(\pi z_i) \right) \leq 0, \\ \mathbf{z} &\geq 0. \end{aligned}$$

このとき、パラメータ η を $\eta \geq 2\pi^2$ と設定することで、第 2 項の凸性を保証することができ、非負整数制約が成立する場合に限り、 $q(\mathbf{z}) = 0$ となり不等式を満たす。

そして、これらを罰則関数として目的関数に追加することにより、最尤復号問題 (1)–(3) は次のような非凸最適化問題として再定式化される：

$$\text{minimize } \boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{x} + \gamma_1 p(\mathbf{x}) + \gamma_2 q(\mathbf{z}) \quad (4)$$

$$\text{subject to } \mathbf{H}\mathbf{x} = 2\mathbf{z}, \quad (5)$$

$$\mathbf{x} \in [0, 1]^n, \quad \mathbf{z} \geq 0. \quad (6)$$

ここで、 $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ は罰則項の重みであり、これらを十分大きく設定することで、連続変数として扱いつつ、解が実質的に二値および非負整数となるよう罰則関数により誘導される。

次に、非凸性を含む目的関数に対して、凹関数部分を暫定解に基づいて線形近似し、凸最適化問題を繰り返し解く DC アルゴリズム [2] を適用する。凹関数部分を t 回目の暫定解 $\bar{x}_j^{(t)}, \bar{z}_i^{(t)}$ に基づいて線形近似することで、以下

のような凸最適化問題が得られる：

$$\begin{aligned} \text{minimize } & \boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{x} + \gamma_1 \sum_{j=1}^n x_j - 2\gamma_1 \sum_{j=1}^n \bar{x}_j^{(t)} x_j \\ & + \gamma_2 \sum_{i=1}^m \frac{\eta}{2} z_i^2 - \gamma_2 \sum_{i=1}^m \left(\eta \bar{z}_i^{(t)} - \pi \sin(2\pi \bar{z}_i^{(t)}) \right) z_i \end{aligned} \quad (7)$$

$$\text{subject to } \mathbf{H}\mathbf{x} = 2\mathbf{z}, \quad (8)$$

$$\mathbf{x} \in [0, 1]^n, \quad \mathbf{z} \geq 0. \quad (9)$$

この凸最適化問題を繰り返し解くことで暫定解を更新し、目的関数値の改善が所定の閾値を下回るか、最大反復回数に到達した時点で暫定解を出力する。本手法により、最尤復号問題に対して整数制約を緩和しつつ、信頼性の低い通信路においても高精度かつ高速な復号を実現することが可能となる。

4 数値実験

提案手法の有効性を復号性能および計算時間の両面から検証する。実験では、符号長や通信路の信頼性を変化させた複数の条件下で、既存手法と比較し評価する。実験に使用したデータおよび結果の詳細は当日報告する。

参考文献

- [1] Kschischang, F. R., Frey, B. J., & Loeliger, H.-A. (2001). Factor graphs and the sum-product algorithm. *IEEE Transactions on Information Theory*, 47(2), 498–519.
- [2] Pham Dinh, T., & Le Thi, H. A. (2014). Recent advances in DC programming and DCA. *Transactions on Computational Intelligence*, XIII, 1–37.
- [3] Tanatmis, A., Ruzika, S., Hamacher, H. W., Punekar, M., Kienle, F., & Wehn, N. (2010). A separation algorithm for improved LP-decoding of linear block codes. *IEEE Transactions on Information Theory*, 56(7), 3277–3289.