

2色一次元ボタン&シザーズの線形時間アルゴリズム

隼田 駿[†] 伊藤 大雄[‡]

電気通信大学[§]

1 はじめに

与えられたボタン&シザーズ [2] の盤面が解を持つか否かを問う問題、ボタン&シザーズ問題が NP 完全であることや、一次元ボタン&シザーズ問題は多項式時間で解くことができることが知られている [1]。しかし、一次元ボタン&シザーズ問題の多項式時間解法 [1] は、文脈自由言語で表現できることを示し CYK 法を用いているため、盤面（文字列）のサイズ n に対し $O(n^3)$ 時間かかる。これは2色の場合も同様である。我々は2色一次元ボタン&シザーズ問題の解が Yes である必要十分条件を与える。そしてそれを用いた線形時間解法を与える。

2 一次元ボタン&シザーズ

一次元ボタン&シザーズの問題は図1のように $1 \times n$ マスからなる盤面上の各マスに色付きのボタンが高々1つ存在する形で与えられる。



図1 2色一次元ボタン&シザーズの例

盤面に存在するボタンの色が k 種類以下であるとき、 k 色一次元ボタン&シザーズと呼ぶ。唯一の操作であるカットを適用することですべてのボタンを取り除くことを目的としており、カットは次のように定義される。

カット．盤面上の異なる2つの同色のボタンを端点とした線分上のボタンをすべて取り除く行為を**カット**と呼ぶ。ただし、線分上のボタンは全て同色である必要がある。

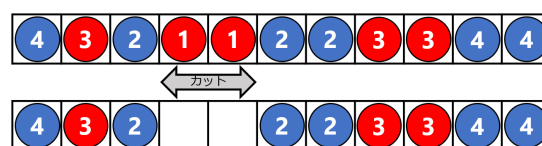


図2 2色一次元ボタン&シザーズの解法

図2は図1の解を表しており、番号の順番にカットを適用することで解くことができる。上述した解法と異なるカットから始めた場合は必ず行き詰まり、貪欲にカットを適用するアルゴリズムでは解の存在の判定を保証できない。 k 色一次元ボタン&シザーズ問題は次のように定義される。

k 色一次元ボタン&シザーズ問題.

入力: サイズ n の k 色一次元ボタン&シザーズの盤面 (n は自然数)。

出力: 解が存在するか否か (Yes or No)。

k 色一次元ボタン&シザーズの盤面に対し、ボタンの色に0から $k-1$ までの数字を割り当て、空のマスに λ を割り当てることで、文字列として表現する。

定義 1 (文脈自由言語 $BS_k[1]$). 整数 $k \geq 1$, $i \in \{0, \dots, k-1\}$ に対し、言語 BS_k は次のように定義される (γ は空語)。

$$S \rightarrow \gamma \mid \lambda \mid SS \mid iSi \mid iSiSi$$

A linear-time algorithm for two-color one-dimensional buttons & scissors

[†] Suguru Hayata

[‡] Hiro Ito

[§] The University of Electro-Communications

3 文字列の前処理

左シフトとは、図3のように文字列の末尾の文字を先頭に移動させる操作である。

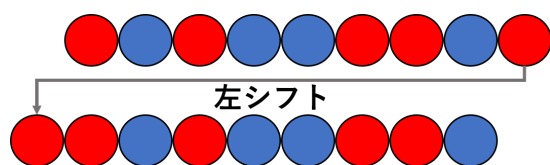


図3 左シフト

連長圧縮とは、文字列中の連続した文字を連続した長さを用いて圧縮するアルゴリズムである。例えば、01100 は $0^11^20^2$ に圧縮される。 0^1 や 1^2 などの一つの連続した文字のかたまりを連と呼ぶ。文字列 v を連長圧縮した後の連の個数を v の圧縮表現長と呼び、 $\|v\|$ で表す。本研究では、入力文字列に対し次のように定義される前処理を行う。

前処理.

1. 文字 λ をすべて取り除く。
2. 先頭と末尾が異なる文字になるまで左シフトする。
3. 連長圧縮する。
4. 末尾の連の指数が2以上になるまで連単位で左シフトする。

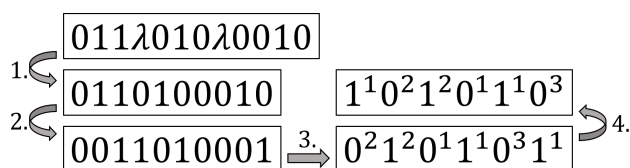


図4 前処理の適用例

前処理は長さ n の文字列に対し、 $O(n)$ 時間で可能である。また、前処理の性質として補題1を証明した。

補題 1. 前処理を行っても文字列が BS_k に属しているか否か（すなわち、盤面を解くことができるか否か）は変わらない。

4 必要十分条件とアルゴリズム

前処理後の文字列には0の連と1の連が交互に存在し、先頭と末尾の文字が異なることから $\|v\|$ は偶数である。連長圧縮後の文字列 v の部分文字列のうち、 0^1 と 1^1 からなる極大な部分文字列を負荷列と呼ぶ。 v に圧縮表現長が $\|v\|/2$ 以上の負荷列が存在するとき、 v は過負荷であるといい、そうでないならば軽負荷であるという。定理1を証明した。本定理に基づく線形時間アルゴリズムは容易に設計できる。

定理 1. 2色一次元ボタン&シザーズは、盤面を前処理した文字列 v が軽負荷であるとき、かつそのときに限り解くことができる。そして、2色一次元ボタン&シザーズ問題は $O(n)$ 時間で解くことができる。□

謝辞

本研究の予備的な研究を行なった元電気通信大学大学院修士課程の小林諒大朗氏に感謝します。

参考文献

- [1] K. Burke, Erik D. Demaine, H. Gregg, Robert A. Hearn, A. Hesterberg, M. Höfmann, H. Ito, I. Kostitsyna, J. Leonard, M. Löffler, A. Santiago, C. Schmidt, R. Uehara, Y. Uno, and A. Williams, “Single-player and two-player buttons & scissors games”, Proc. JCDCG’2015, LNCS, Springer, #9943, pp. 60–72, 2016.
- [2] KyWorks. “Buttons and Scissors”. Google Play. 2024.
<https://play.google.com/store/apps/details?id=com.kyworks.buttonsandscissors.inapp>, (参照 2024-12-31).